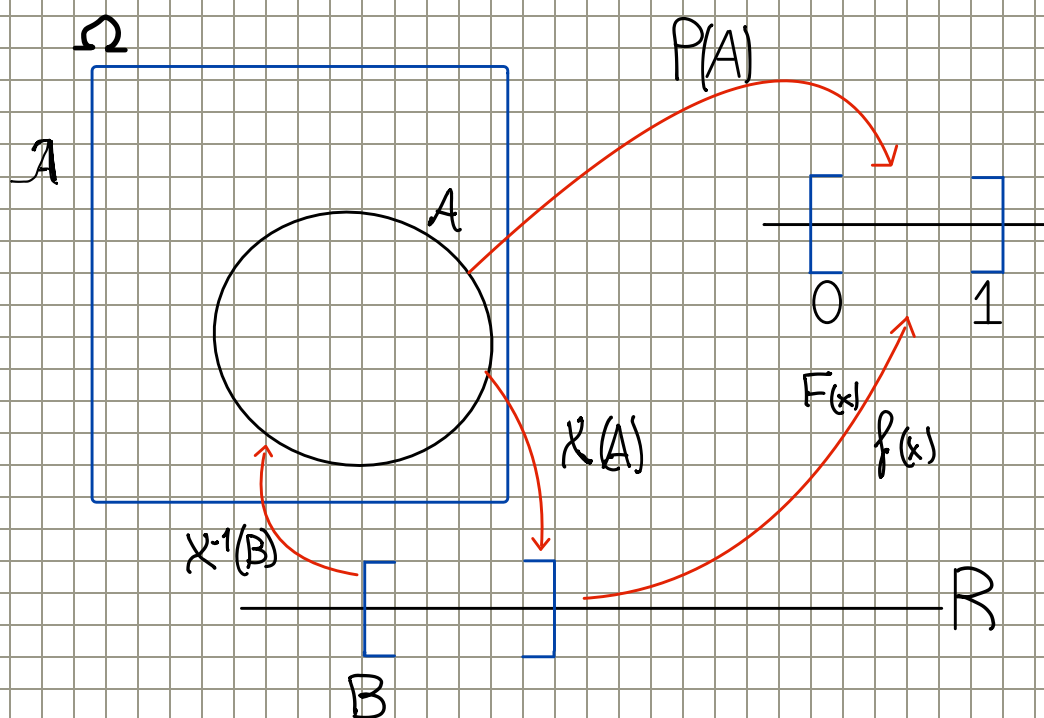


• VARIABLE ALEATORIA UNIVARIANTE



• $X \Rightarrow$ Variable aleatoria

• $F(x) \Rightarrow$ distribución probabilidad

• $f(x) \Rightarrow$ densidad probabilidad

- Función Real de los Resultados

- Variable Aleatoria Univariente (v.a.)

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sea

$$X: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \in \mathcal{A} \mapsto X(A) \in \mathbb{R}$$

X es v.a. Sobre $\Omega \Leftrightarrow \forall$ intervalo $B \subset \mathbb{R}$, se tiene que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

• ESPACIO MUESTRAL ASOCIADO A UNA V.A.

$S = \{\text{todas las realizaciones } X(\omega), \omega \in \Omega\}$

• Función de Distribución (F.d.D) $F(x)$

En un sentido estrict. matemático, $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ es una F.d.D si:

1.- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

2.- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

3.- F es monótona no decreciente

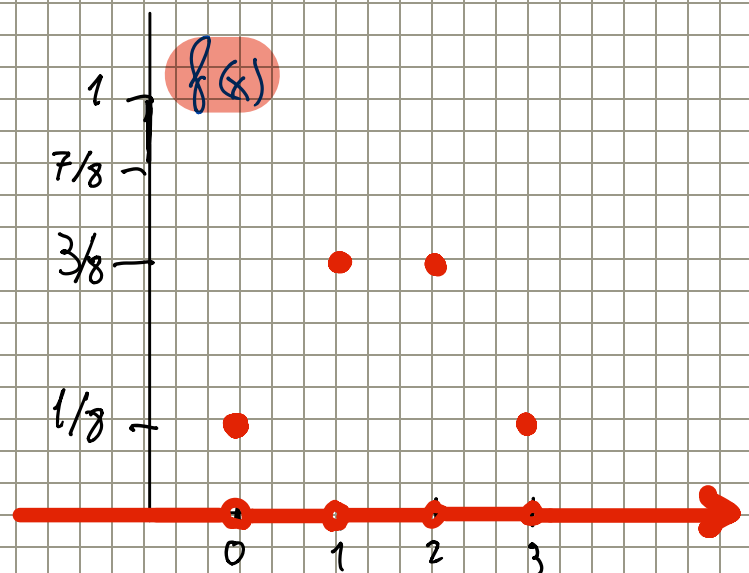
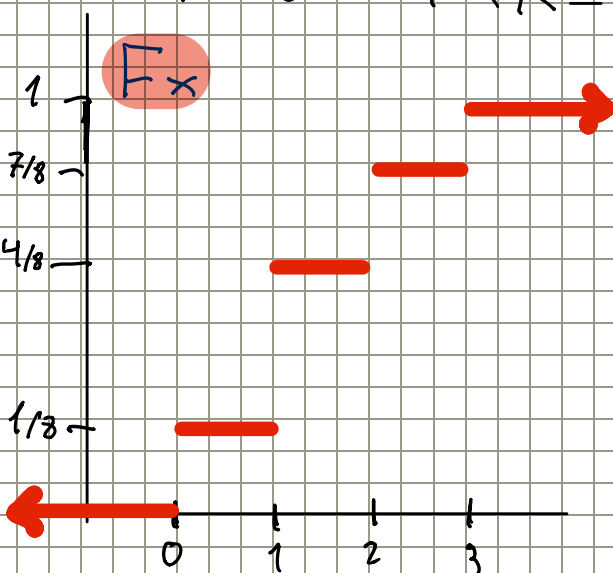
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

4.- F es continua por la derecha.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x)$$

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}) \quad (F(x) = P(X \leq x))$$

Ej: $F(0) = P(X \leq 0)$



• VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

- Espacio muestral asociado es Finito o numerable

$$P(X = x) = P(X(x)) = P(\{\omega \in \Omega / X\omega = x\})$$

- Función de Densidad de una v.a. (F.d.d) $f(x)$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } f(x) \begin{cases} 0 & \forall x \notin S \\ P(X=x) & \text{si } x \in S \end{cases}$$

• VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

V.a. puede tomar un valor dentro de un intervalo real.

$$S: (a, b)$$

$$P(a < X < b) = P(\{\omega \in \Omega / a < X(\omega) < b\})$$

- F.d.d

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \bullet P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

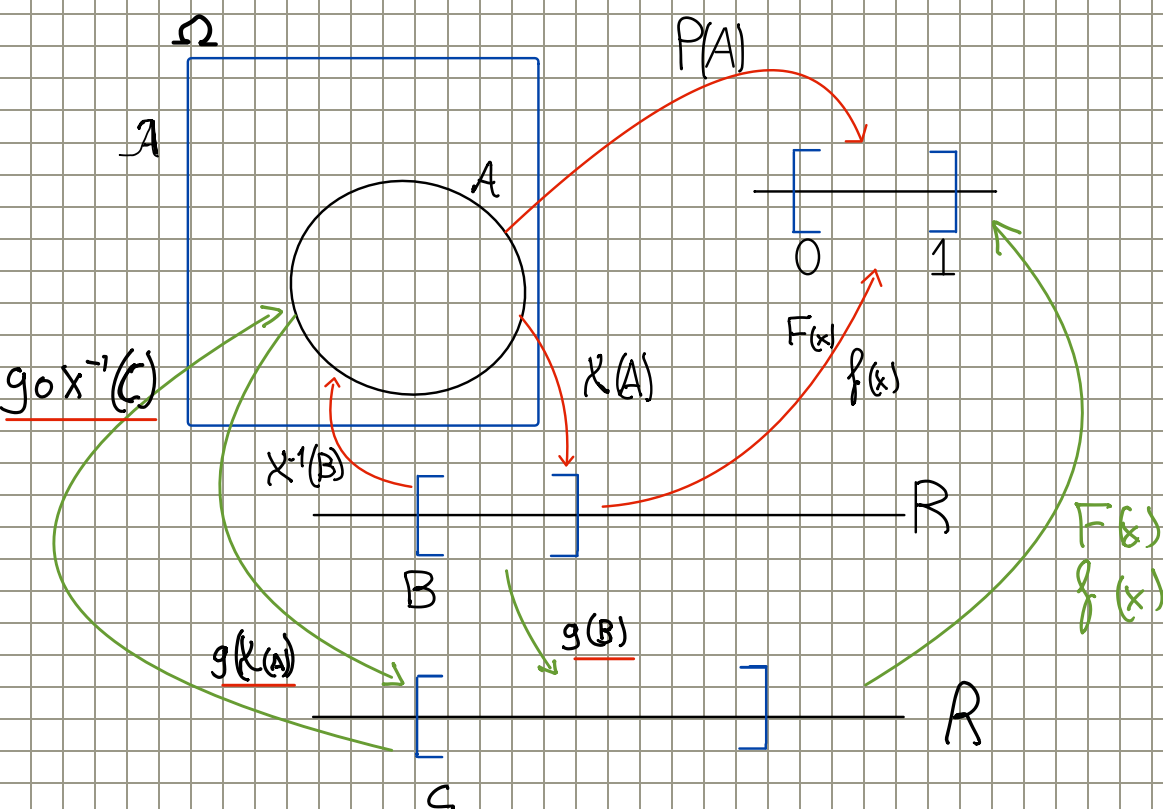
- Relación F.d.D. y F.d.d.

$$\bullet F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\bullet f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

• VALOR ESPERADO (E)

Sea X una v.a. y sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



- Caso Discreto

$$E[g(X)] = \sum_{x_i \in S} g(x_i) f(x_i)$$

Suceso · prob suceso

- Caso Continuo

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

• ESPERANZA MATEMÁTICA

Si $g(x)$ es la identidad ($g(x) = x$), a $E[X]$ se le denomina esperanza matemática, siendo habitual notarla en μ .

- Propiedades: 1. $E[k] = k$ 2. $E[a + bX] = a + bE[X]$

• MOMENTOS

- Momento de orden k Respecto al Parámetro c.

$$M_k^c = E[(X - c)^k]$$

- Momento Respecto al Origen $c=0$

$$\alpha_k = E[X^k]$$

- Momentos Centrales $c = \mu_x$

$$\mu_k = E[(X - \mu_x)^k]$$

• MEDIANA DE UNA V.A. ($\bar{x}$)

• $\mu_x = \mu = \alpha_1 = E[X]$ Valor medio distribución K

$$\mu = \sum_{x_i \in S} x_i f(x_i) \quad ; \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

• VARIANZA DE UNA V.A.

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 = \mu_2 = E[(X - \mu)^2]$$

$$\sigma^2 = \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 f(x_i) \quad ; \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

- Desviación típica

$$\sigma = + \sqrt{\sigma^2}$$

- Propiedades

• $Y = a + bK$ siendo $K \in D(\mu_x, \sigma_x^2)$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\sigma_y^2 = b^2 \sigma_x^2$$

Coefficiente Variación

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu}$$

• PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Distribución Uniforme

X toma valores $x_1, x_2, \dots, x_k$ de misma prob.

$$\bullet f(x) = f(x, k) = \frac{1}{k} \quad \forall x = x_1, x_2, \dots, x_k \in U(k)$$

$$\bullet \mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$$

$$\bullet \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k}$$

1 solo $x \Rightarrow$ distribución degenerada o singular

Distribución de Bernoulli o Binaria

Experimento aleatorio con dos posibles resultados

$$S_x = \{0, 1\}$$

$$\bullet A = \{1\}; P(A) = p \quad \bullet B = A^c = \{0\}; P(B) = q = 1 - p$$

$$\bullet f(x) = f(x, p) = p^x (1-p)^{1-x} \in B(p)$$

$$\bullet \mu = p$$

$$\bullet \sigma^2 = p(1-p)$$

Distribución Binomial

Dadas n pruebas de Bernoulli repetidas e independientes:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \in B$$

v.a X "nº éxitos total en las n pruebas" se dice binomial de parámetros n y p .

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \in B(n, p)$$

$$\bullet f(x) = f(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\bullet \mu = n \cdot p$$

$$\bullet \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Distribución Hipergeométrica

Muestra aleatoria de n elementos, de los cuales $a \rightarrow$ éxitos y $b \rightarrow$ fracasos ($a+b=N$)

$$X \in h(n, a, b)$$

$$\bullet f(x) = f(x, n, a, b) = \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}} \quad \begin{cases} x \leq a \\ n-x \leq b \\ n \leq a+n \end{cases}$$

$$\bullet \mu = n \cdot p$$

$$\bullet \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{b}{N}$$

- Distribución de Poisson

La v.a. X , nº ocurrencias suceso A (éxito) durante una gran número de pruebas.

$$n \approx \text{nº grande}$$

$$p \approx \text{nº pequeño}$$

$$f(x) = f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$P(\lambda)$$

- Distribución Geométrica (dicotómico)

V.a que cuenta el nº de la prueba en la que aparece el primer éxito.

$$f(x) = f(x, p) = q^{x-1} \cdot p$$

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

- Distribución Binomial Negativa (dicotómico)

V.a que cuenta el nº de la prueba en la que aparece el éxito nº k .

$$f(x) = f(x, k, p) = \binom{x-1}{k-1} \cdot q^{x-k} \cdot p^k$$

$$\mu = \frac{k}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{k \cdot q}{p^2}$$

$$X \in h(n, a, b) \longrightarrow X \in b(n; p = \frac{a}{N})$$

$$X \in b(n, p) \longrightarrow X \in P(\lambda = np)$$

• PRINCIPALES DISTRIBUCIONES CONTINUAS

- Distribución Uniforme o Rectangular

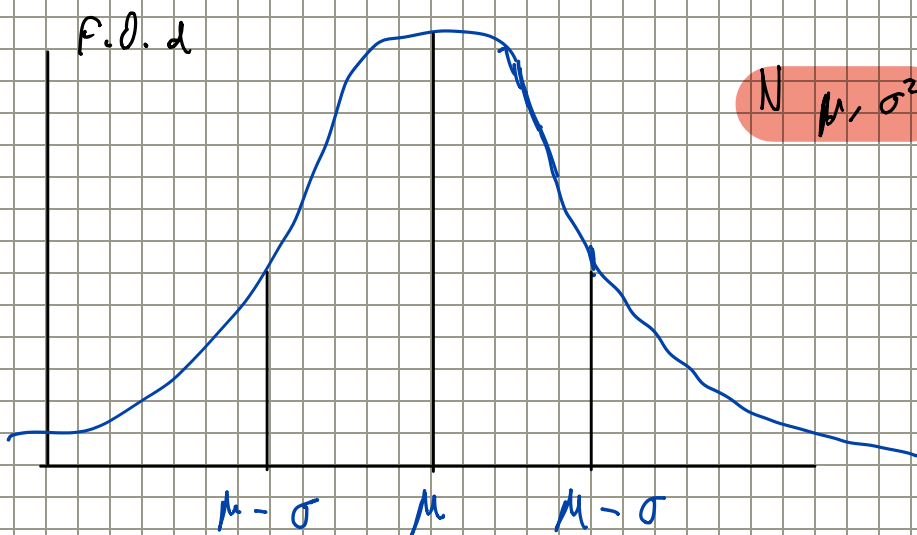
Una v.a. con $S = \{a, b\}$. Todos p'tos de S son equiprobables.

$$f(x) = f(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin S \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in S \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{b-a^2}{12}$$

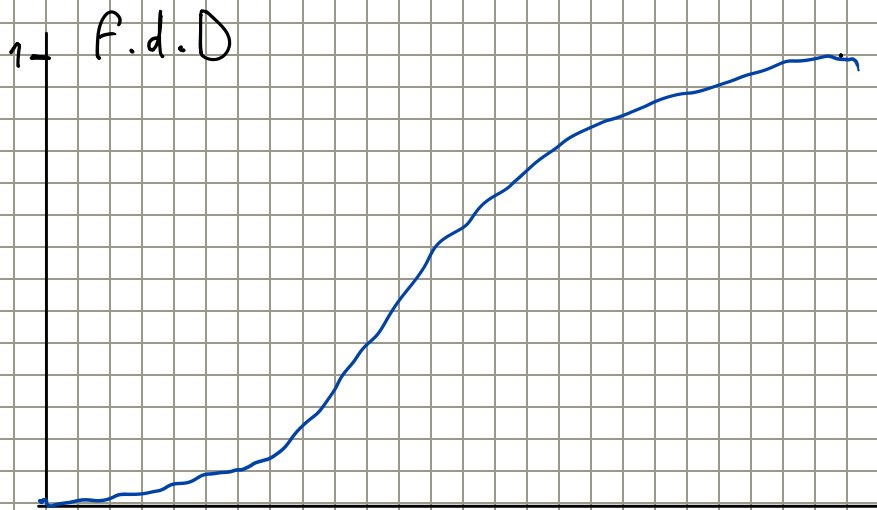
- Distribución Normal + Importante



$$f(x) = f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

• Consideraciones

- Meda en $x = \mu$
- Curva simétrica respecto a μ
- Ptos inflexión en $x = \mu \pm \sigma$
- Asintota eje horizontal.
- Area = 1
- $F(x)$:



- Distribución Normal Estándar

• $\mu = 0$

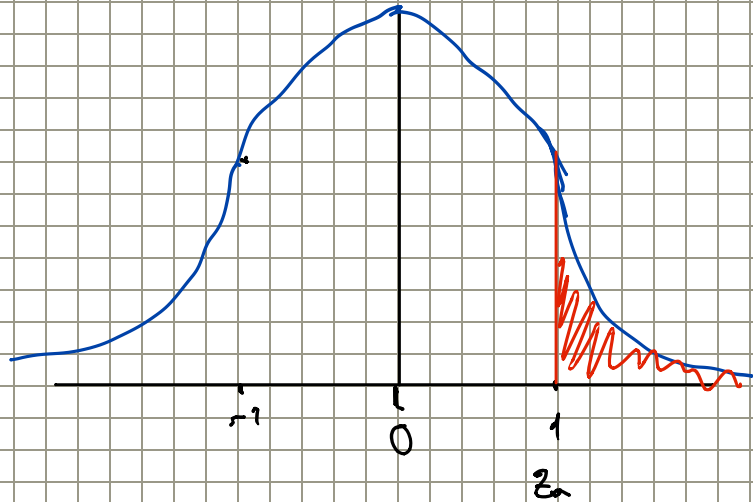
$$\sigma^2 = 1$$

$$K \in N(0, 1)$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$$

Tabulada. Se proporcionala:

$$P(K \geq Z_\alpha)$$



z_{00}	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0036	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
z_{00}	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,0013	0,0017	0,0020	0,0024	0,0028	0,0033	0,0038	0,0043	0,0048	0,0054
4	0,0062	0,0071	0,0081	0,0092	0,0103	0,0114	0,0125	0,0136	0,0147	0,0158

- Tipificación v.a. Normales

Dada v.a. $K \in N(\mu, \sigma^2)$, la v.a. $Z = \frac{K - \mu}{\sigma} \in N(0,1)$

Transformar v.a. normal a una estandar

- Distribución Gamma.

$\gamma(a, \theta)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \cdot e^{-ax} & \text{s: } \begin{cases} x > 0 \\ a, p > 0 \end{cases} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad \text{Convergente en } \forall p > 0$$

$$\mu = \frac{p}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{p}{a^2}$$

- Distribución Exponencial.

Caso particular de distr. gamma donde $p=1$

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & \text{s: } \begin{cases} x \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{p}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{p}{a^2}$$

- Distribución Chi-Cuadrado

Caso particular de distr. gamma donde:

$$\alpha = 1/2$$

$$\beta = n/2$$

$$\chi^2(n)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-1/2 x} & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- $n =$ grado libertad

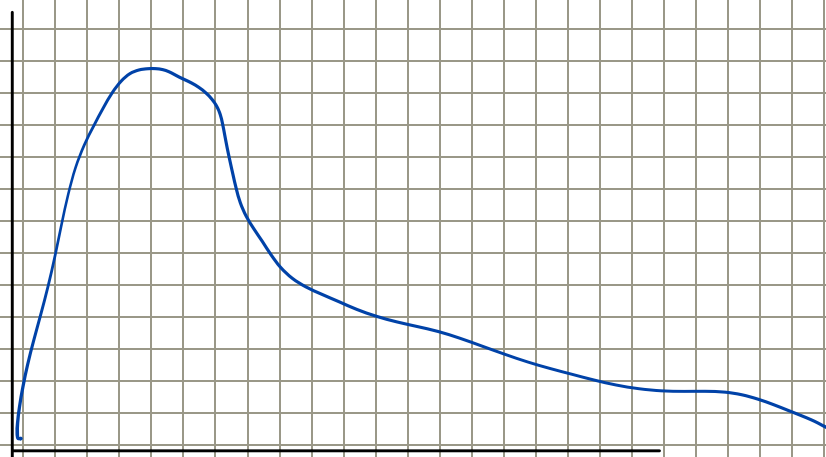
$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$

- Construcción a partir de la normal

$\chi^2 = Z^2 \Rightarrow$ Distribución Cuadrada de la normal

$$\chi^2(n)$$



Distribución t de Student.

$$K \in t_{(n)}$$

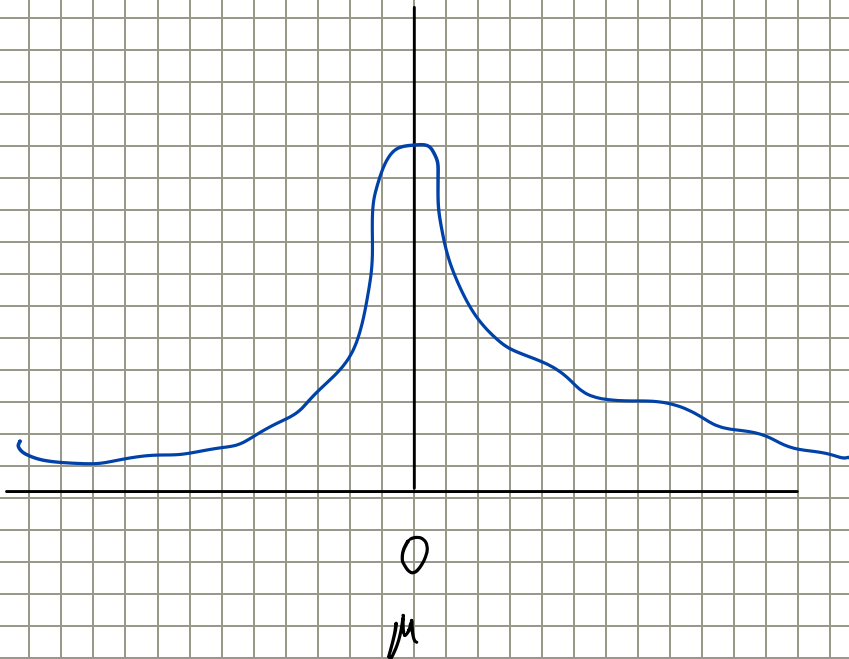
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2} \quad \forall n > 2$$

Construcción a partir de la normal

$$K = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \in t_{(n)}$$



Distribución F de Fisher - Snedecor

$$f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} \cdot \left(1 + \frac{m}{n} x\right)^{-\left(\frac{m+n}{2}\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mu = \frac{n}{n-2} \quad \forall n > 2$$

$$\sigma^2 = \frac{2n^2 (m+n-2)}{m(n-2)^2 (n-4)} \quad \forall n > 4$$

TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

Sean la v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ independientes entre sí, y con la misma distribución:

$X_i \in D(\mu, \sigma^2) \quad \forall i$. Se verifica que la v.a.:

$$K = \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow \in N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\frac{K - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \longrightarrow \in N(0, 1)$$

- Relación Convergencias entre $B(n, p)$, $P(\lambda)$, $N(\mu, \sigma)$

• $X \in B(n, p) \rightarrow P(\lambda) \quad (\lambda = n \cdot p < 18)$

• $X \in B(n, p) \rightarrow N(np, npq)$ Teorema De Moivre

$\hookrightarrow \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0, 1)$

• $X \in P(\lambda) \rightarrow N(\lambda, \lambda)$ $\begin{cases} \lambda = n \cdot p \geq 18 \\ \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow N(0, 1) \end{cases}$

- Corrección Continuas Yates

Si se quiere aproximar una dist. discreta a continua hay que aplicar una corrección de continuidad

Discreta	Continua
$x = a$	$a - 0.5 < y < a + 0.5$
$a < x < b$	$a + 0.5 < y < b - 0.5$
$a \leq x \leq b$	$a - 0.5 < y < b + 0.5$
$a \leq x < b$	$a - 0.5 < y < b - 0.5$
$a < x \leq b$	$a + 0.5 < y < b + 0.5$

$P(X=a) \approx P(a-0.5 < Y < a+0.5)$

$P(X \geq a) \approx P(Y \geq a-0.5)$

$P(X > a) \approx P(Y \geq a+0.5)$

- Relación Convergencias Entre Continuas.

$$sb \rightarrow Nr. \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$$

$$ch \rightarrow Nr. \quad X \in \chi^2_n \xrightarrow{n > 30} N(\mu = n; \sigma^2 = 2n)$$

$$\text{Si } n > 30 \Rightarrow Y = \sqrt{2k} - \sqrt{2n-1} \rightarrow N(0; 1)$$

$$F_{nr} \rightarrow \begin{matrix} F_{nr} \\ \Delta \rightarrow Nr. \end{matrix} \quad X \in F_{(n_1; n_2)} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} X \in \chi^2_{(n_1)}$$

$$X \in \chi^2_{(n)} \xrightarrow{n > 30} N(\mu = n; \sigma^2 = 2n)$$